Allgemein

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable X ist $E[X]$. $E[X]$ ergibt sich als $E[X] = \sum_i p_i X_i$.

Die Varianz ist der Erwartungswert der quadrierten Abweichungen der Ausprägungen der Zufallsvariable vom Erwartungswert der Zufallsvariable.

$V[X] = E[X - E(X)]^2$

$V[X] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2]$

$V[X] = E[X^2] - E\big[2XE[X]\big] + E[(E[X])^2]$

$V[X] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[(E[X])^2]$

$V[X] = E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2$

$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Bernoulli-Experiment

Bei einem Bernoulli-Experiment gibt es zwei mögliche Ereignisse. Entweder wird ein Kriterium mit der Wahrscheinlichkeit p erfüllt (Treffer), dargestellt durch eine 1, oder es wird mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - p$ verfehlt (Niete), dargestellt durch eine 0.

Dann gilt für den Erwartungswert:

$E[X] = p$, denn $E[X] = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p$.

X kann wie gesagt nur die Werte 0 und 1 annehmen. Es folgt für die Varianz:

$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - p^2$

$V[X] = p \cdot 1^2 + (1 - p) \cdot 0^2 - p^2$

$V[X] = p - p^2$

$V[X] = p(1 - p)$

Binomialverteilung

Ein Binomialexperiment besteht aus n unabhängigen Bernoulli-Versuchen mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Binomial-Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Erfolge in den n Versuchen. X ist also die Summe der Bernoulli-Variablen: $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Dann gilt für den Erwartungswert:

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] = np$$

Es folgt für die Varianz:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - (np)^2$$

$$V[X] = E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2] - (np)^2$$

$$V[X] = E\left[{X_1}^2 + {X_2}^2 + \ldots + {X_n}^2 + 2X_1X_2 + \cdots 2X_iX_j + \cdots 2X_{n-1}X_n\right] - (np)^2$$

Für jedes X_i gilt:

$$E\left[{X_i}^2\right] = p1^2 + (1-p)0^2 = p$$

Die Anzahl der X_i ist n.

Für jedes Kreuzpaar von X_i und X_j gilt:

$$E\left[2X_iX_j\right] = 2E\left[X_iX_j\right] = 2(p \cdot 1 \cdot p \cdot 1 + p \cdot 1 \cdot (1-p) \cdot 0 + (1-p) \cdot 0 \cdot p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 \cdot (1-p) \cdot 0)$$

$$E\left[2X_iX_j\right] = 2E\left[X_iX_j\right] = 2(p^2) = 2p^2$$

Die Anzahl der Kreuzpaare von X_i und X_j ist $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}^{n!}}{\underbrace{1 \cdot 2}_{2!} \cdot \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-2)}_{(n-2)!}} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$.

Dann folgt:

$$V[X] = E\left[\underbrace{{X_1}^2 + {X_2}^2 + \ldots + {X_n}^2}_{n\ Terme} + \underbrace{2X_1X_2 + \cdots 2X_iX_j + \cdots 2X_{n-1}X_n}_{\binom{n}{k}\ Terme}\right] - (np)^2$$

$$V[X] = np + \frac{(n-1) \cdot n}{2} 2p^2 - (np)^2$$

$$V[X] = np + (n^2 - n)p^2 - (np)^2$$

$$V[X] = np + n^2p^2 - np^2 - (np)^2$$

$$V[X] = np + (np)^2 - np^2 - (np)^2$$

$$V[X] = np - np^2$$

$$V[X] = np(1-p)$$